[Υπενθύμιση:]

Ορισμός: $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται

(α) εσωτ. σημείο του $U \iff \exists \varepsilon > 0,\ B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

(β) εξωτ. σημείο του $U \iff$ εσωτ. του $\mathbb{R}^n / U$

(γ) συνοριακό σημείο $U \iff$ το $\bar{x}$ δεν είναι ούτε εσωτ. ούτε εξωτ.

Συμπλήρωση:

$\mathrm{int}\, U$ = το σύνολο των εσωτερικών σημείων

$\mathrm{ext}\, U$ = -||- -||- -||- εξωτερικών -||-

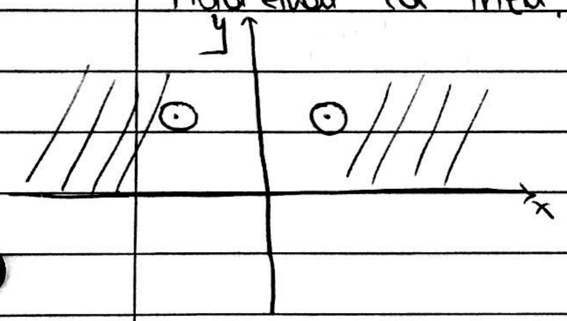
$\mathrm{bd}\, U$ = -||- -||- -||- συνοριακών -||-

Παράδειγμα:

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y < 0\}$

Ερώτημα:

Ποια είναι τα $\mathrm{int}\, U, \mathrm{ext}\, U, \mathrm{bd}\, U$



① $\mathrm{int}\, U \supset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

αφού αν $y > 0$ (και $x \in \mathbb{R}$) τότε

$B((x,y), y) \subset U$

② $\mathrm{ext}\, U \supset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$

$= D$ (αφού αν έχω $y < 0$ (και $x \in \mathbb{R}$ οποιοδήποτε)

$B((x,y), \underbrace{-y}_{=|y|}) \subset D$ [Έστω $(x_1, y_1) \in B((x,y), -y)$ Θ.ν.δ.ο. $y_1 < 0$

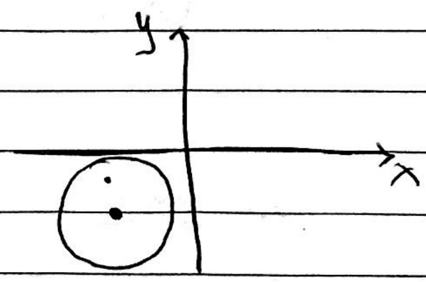
$\iff \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < |y|$

Έχουμε σίγουρα $|y_1 - y_0| < |y_0|$

$\iff -|y_0| < y_1 - y_0 < |y_0|$

$\iff y_0 - |y_0| < y_1 < \underbrace{|y_0| + y_0}_{} = 0$

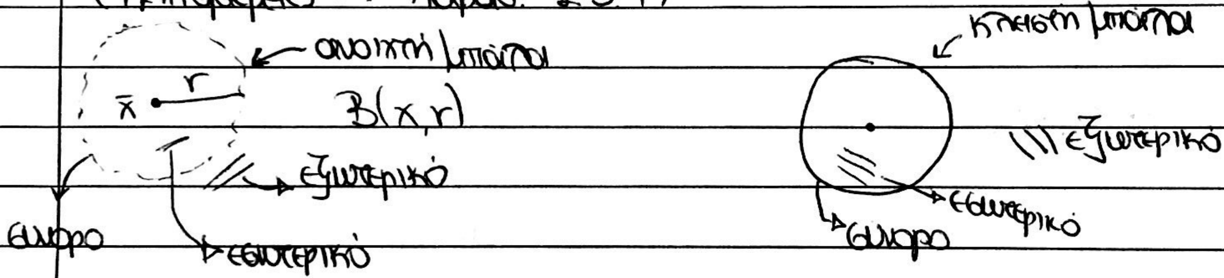
$= -y_0$



Επίσης $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = 0$ βλέπω ότι
$B((x_0, y_0), \varepsilon) \not\subset U,\ \not\subset \mathbb{R}^n \setminus U \quad \forall \varepsilon > 0$
[Άσκηση: Αποδείξτε το]
$\Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \subset bdU$ (3)

Από τα (1) (2) (3), προκύπτει ότι
$intU = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ $\quad extU = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$
$bdU = \mathbb{R} \times \{0\}$ [Υπενθύμιση: $extU \cup intU \cup bdU = \mathbb{R}^n$, ξένη ένωση]

Άσκηση:
Το εσωτερικό, το εξωτερικό και το σύνορο της ανοιχτής και της κλειστής μπάλας ταυτίζονται
(λεπτομέρειες → Παράδ. 1.34)



Πρόταση 1.34
Έστω $U \in \mathbb{R}^n$
Τότε: (α): $intU \subset U$
(β): $intU$ ανοιχτό
(γ): U ανοιχτό $\Leftrightarrow intU = U$
(δ): $U \subset V \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow intU \subset intV$
(ε): $\underset{\uparrow \text{ ορισμός}}{extU} = int(\mathbb{R}^n \setminus U) \ (\subset \mathbb{R}^n \setminus U)$

Παρατήρηση:
Το εξωτερικό ενός U δεν είναι απαραίτητα το συμπλήρωμα του U [$extU \neq \mathbb{R}^n \setminus U$]

Απόδειξη:

(α) $\bar{x} \in \operatorname{int} U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B(\bar{x},\varepsilon)}_{\bar{x}} \subset U$

(β) Έστω $\bar{x} \in \operatorname{int} U \underset{\text{ορισμός}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x},\varepsilon) \subset U$

Όμως κάθε ανοιχτή μπάλα είναι ανοιχτό σύνολο $\Rightarrow \forall \bar{y} \in B(\bar{x},\varepsilon)$
$\exists \varepsilon(\bar{y}) > 0 : B(\bar{y},\varepsilon(\bar{y})) \subset B(\bar{x},\varepsilon) \subset U \Rightarrow$ Κάθε $\bar{y} \in B(\bar{x},\varepsilon)$
είναι εσωτ. σημείο του $U \Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon) \subset \operatorname{int} U$.

(γ) $\Rightarrow$: Προκύπτει από το (α) και τους ορισμούς του εσωτ. σημείου και του ανοιχτού συνόλου.
[κάθε σημείο ενός ανοιχτού συνόλου, είναι εξ ορισμού εσωτερικό σημείο του συνόλου].

$\Leftarrow$ από το (β)

(δ) από τον ορισμό του εσωτ. σημείου

(ε) Προκύπτει από τους ορισμούς, εξωτερικού και εσωτερικού σημείου [η ισότητα] και το (α) □

Έστω ένα $U \in \mathbb{R}^n$. Ποιο είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το U;
[π.χ. Ποιο είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει την ανοιχτή μπάλα $B(\bar{x},r)$;]

είναι η κλειστή μπάλα.

Ορισμός:
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το U, ονομάζεται κλειστή θήκη του U και συμβολίζεται με $\bar{U}$, δηλ. $\bar{U} := \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$, όπου $\mathcal{K} = \{ K \in \mathbb{R}^n,\ K \text{ κλειστό},\ K \supset U \}$

Πρόταση 13.5

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε (α): $U \subset \bar{U}$

(β): $\bar{U}$ κλειστό σύνολο

(γ): $U \subset K \subset \mathbb{R}^n$, K κλειστό $\Rightarrow \bar{U} \subset K$

(δ): U κλειστό $\Leftrightarrow U = \bar{U}$

Απόδειξη:

(α) Έστω $\bar{x} \in U$ και K όπως στον ορισμό $\Rightarrow$

$\bar{x} \in U \subset K \ \forall K \in \mathcal{K} \Rightarrow \bar{x} \in \bigcap K = \bar{U}$, $K \in \mathcal{K}$

(β) $\bar{U}$ = τομή κλειστών συνόλων (προηγούμενη πρόταση)

(γ) Αφού $K \in \mathcal{K}$, τότε $\underset{L \in \mathcal{K}}{\bigcap} L \subset K$ [κάποιο από τα $L \in \mathcal{K}$
$\bar{U}$ $\in$ ~~LoVLock~~ είναι το K]

(δ) $\Rightarrow$

Αφού U κλειστό και (τετριμμένα) $U \in U$, τότε από το (γ) έχουμε $\bar{U} \subset U$. Επίσης από το (α), έχουμε $U \subset \bar{U}$

$\Leftarrow$ από το (β).